# Funktionales Denken

## Einführung in den Themenbereich „Funktion“

Dorothea Huber

| | |
|---|---|
| Thema | Einführung in das funktionale Denken |
| Stoffzusammenhang | Relationen und Funktionen |
| Klassenstufe | 1. Biennium |

## Intention

In dieser Lernumgebung sollen sich die Lernenden mit funktionalen Zusammenhängen und deren Graphen intensiv auseinandersetzen. Durch die teilweise rein qualitative Betrachtung wird es möglich, Graphen von noch nicht bekannten Funktionstypen zu untersuchen. Dadurch tritt das rein mechanische Rechnen bzw. das reine Anwenden von Lösungsverfahren in den Hintergrund.
Laut Kröpfl (2007) sind die zwei wesentlichen oder globalen Ideen der Funktionen die Abhängigkeit einer Variablen von einer oder mehrerer Variablen und der Verlauf einer Funktion. Der Verlauf drückt sich vor allem in den Änderungen aus, welche an der Wertetabelle oder am Graphen der Funktion abgelesen werden können.
Im alltäglichen Leben gehören die wenigsten Funktionen zu elementaren Funktionstypen. Die Lernenden erhalten eine allgemeine Einführung in die Funktionen und lernen erst später die linearen und die quadratischen Funktionen als spezielle Funktionstypen kennen.
Bei der Zusammenstellung der Übungen wurde das EIS-Modell (enaktiv, ikonisch und symbolisch) angewandt.

## Fachlicher Hintergrund

In dieser Lernumgebung lernen die Schülerinnen und Schüler verschiedene Funktionstypen kennen, insbesondere solche, die nicht durch eine Funktionsgleichung beschrieben werden. Sie erfahren, dass einige Graphen unmöglich sind, d. h. keine Funktion darstellen. Sie lernen stetige und diskrete Funktionen kennen. Sie wiederholen die Prozentrechnung und die Flächenformel für Rechtecke und untersuchen insbesondere Graphen von Funktionen bzgl. ihrer Änderungsrate.

Folgende thematische Aspekte werden behandelt:

- Zeit-Weg-Funktionen (gleichförmige und beschleunigte Bewegungen), d. h. lineare und quadratische Funktionen
- Füllfunktionen (Volumen → Füllhöhe)
- Potenzfunktionen bzw. indirekt proportionaler Zusammenhang
- Exponentialfunktionen

## Methodische Hinweise

Um die Lernenden besser betreuen zu können (z. B. bei der Übung mit dem CBR-Gerät), wurde der Unterricht größtenteils als Stationenarbeit konzipiert. Bei dieser Methode ist es wichtig, die leistungsschwächeren Lernenden verstärkt zu betreuen, da sie sonst schnell verloren wirken und oft schon bei der Aufgabenstellung überfordert sind. Ein möglicher Unterrichtsverlauf:

### 1. Unterrichtsstunde

Zunächst wird von den Lernenden eine persönliche „Wohlfühlkurve“ vom vorhergehenden Tag erstellt und mit dem Nachbarn bzw. der Nachbarin besprochen. Einige „interessante“ Graphen werden in der Klasse vorgestellt.
Die Klasse wird geteilt. Ein Teil bearbeitet in Partnerarbeit die zweite Station „Graphen gehen“ im Innenhof der Schule, der andere Teil bleibt im Klassenzimmer und arbeitet mithilfe eines CBR-Geräts an Station 1. Das CBR-Gerät misst den Abstand eines Gegenstandes in Abhängigkeit von der Zeit. Die Lehrperson hilft bei den Einstellungen für die erste Messung. Diese Station ist als sogenannte „Blütenaufgabe“ konzipiert. Sie besteht aus einfachen Bestimmungsaufgaben, einer Umkehraufgabe und einer schwierigeren Umkehraufgabe (gleichmäßig beschleunigte Bewegung), die nicht von allen Lernenden gelöst werden muss. Die Richtigkeit der Lösung kann von den Lernenden selbst überprüft werden.
Bei Station 2 „Graphen gehen“ werden Zeit-Weg-Graphen in Partnerarbeit abgegangen. Hilfsmittel ist ein Stuhl. Es gibt auch einen unmöglichen Graphen. Die Lernenden sollen erkennen, dass es sich dabei nicht um den Graphen einer Funktion bzw. eine Bewegung handeln kann.
Die Hausaufgabe thematisiert das „Hochziehen einer Fahne“.

### 2. Unterrichtsstunde

Die Lernenden setzen die Stationenarbeit fort. Bei Station 3 „Füllgraphen“ messen sie die Füllhöhe eines Erlenmeyerkolbens in Abhängigkeit vom Volumen. Am Ende der dritten Station sollen die Lernenden imstande sein, andere Füllgraphen und Gefäße richtig zuzuordnen.
Station 4 „Rechtecke“ behandelt die indirekt proportionale Zuordnung und ihre Eigenschaften. Die Flächenformel eines Rechtecks wird wiederholt.
Station 5 „Reißzweckenschwund“ ist ein Beispiel für eine diskrete exponentielle Funktion.

### 3. Unterrichtsstunde

Die Stationenarbeit wird zu einem Abschluss gebracht. Bei Bedarf werden die Ideen und Ergebnisse zu einige Stationen besprochen.

## Erfahrungen

Beim Einsatz im Unterricht konnten folgende Beobachtungen gemacht werden:

- Anstelle der erwarteten Erklärung „Man kann nicht zu einem Zeitpunkt an zwei Orten sein“ wird der unmögliche Graph mit „Die Zeit kann nicht stehen bleiben“ begründet.
- Bei der Untersuchung der Füllhöhe eines Gefäßes in Abhängigkeit vom Volumen oder der Zeit wird die Skala auf dem benutzten Erlenmeyerkolben außer Acht gelassen.
- Durch die qualitative Einführung zum Thema „Funktionen“ wird vor allem der globale Verlauf des Graphen und weniger die Zuordnung einzelner Werte betrachtet.
- Die Regelmäßigkeit beim Reißzweckenschwund wird nicht erkannt.

## Leistungsbewertung

Die Lernumgebung sollte in einer Erarbeitungs- oder Übungsphase eingesetzt werden. Die erarbeiteten Inhalte, Kenntnisse und Fertigkeiten könnten in einem Test zum Beispiel wie folgt überprüft werden:

- Bewegungs-Graph beschreiben
- Füllhöhe eines Graphen identifizieren / beschreiben
- Ähnliche Zuordnungen: z. B. Zeit $\rightarrow$ Geschwindigkeit, Zeit $\rightarrow$ gelesene Seiten
- Experiment: ein Blatt mehrmals in der Mitte falten, Zahl der Papierschichten in Abhängigkeit von der Zahl der Faltungen als funktionalen Zusammenhang auffassen und diesen darstellen

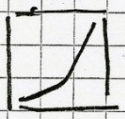
## Dokumente von Schülerarbeiten

### Zu Station 3 „Gefäße füllen“

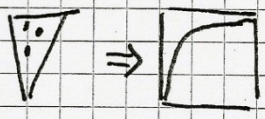
Station 3 erklären: Füllgefäße

Je schmäler ein Gefäß ist, desto schneller lässt es sich füllen. Dabei hat die Linie auf dem Grafen eine größere Steigung. Je breiter ein Gefäß, desto langsamer lässt es sich füllen. Dabei hat die Linie auf dem Graphen eine geringe Neigung. (Bei beiden immer auf die gleiche Höhe des Gefäßes bezogen!)

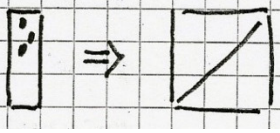
wenn a) ein Gefäß oben schmaler ist als am Ende (nach unten hin immer breiter ist), dann steigt das Wasser an der schmalen Stelle schneller. Der Graph beginnt nicht so steil, aber zum Ende hin wird er steiler.

 Graph schaut ca. So aus 

b) ein Gefäß oben breiter ist als am Ende, dann steigt an den breiten Stellen das Wasser langsamer.

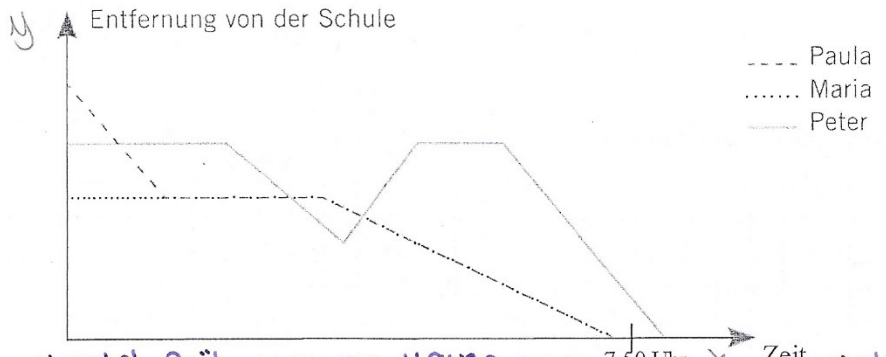


c) ein Gefäß an allen Stellen gleich breit/schmal ist, dann steigt das Wasser gleichmäßig an (bei Zylinder, Quader...)



Wenn das Gefäß von breit schmaler wird, wie beim Erlenmeyer Kolben dann ist die Kurve im Füllgraphen zuerst flach und dann immer steiler. Wenn man gleichmäßig Wasse hinein-schüttet, füllt sich das Gefäß zuerst langsamer und dann schneller, da es unten ja breiter ist. Also steigt der Wasserspiegel langsamer, weil mehr „Platz“ auszufüllen ist. Ist das Gefäß unten schmal und oben breit ist es genau umgekehrt, da ist die Kurve zuerst steil und dann flach, da es sich zuerst schnell und dann langsam füllt. Ist das Gefäß immer gleich, dann ist auch die Kurve immer gleich steil. Zusammenfassend kann man sagen, je flacher die Kurve, desto breiter ist das Gefäß und je steiler die Kurve, desto schmaler ist das Gefäß. Voraussetzung ist, dass die Gefäße gleichmäßig gefüllt werden.

**Testbeispiele**




Paula startet früh von zu Hause weg und trifft sich mit Maria vor ihrem Haus. Dort unterhalten sie sich noch etwas und gehen zusammen direkt zur Schule. Sie kommen dort pünktlich an. Peter startet etwas später von zu Hause wegals Paula. auf seinem Weg zur Schule trifft er Paula u. Hana aber geht gleich weiter. Nach einigen Minuten fällt ihm auf dass er das Matheheft zu Hause vergessen hat und eilt nach Hause. Auf dem Weg nach Hause trifft er erneut auf H. u. P.. zu Hause muss er das Buch noch lange suchen dann macht er sich wieder auf den Weg in die Schule und kommt aber zu spät.

(3). a) Wie sehen die Graphen von linearen Funktionen aus? Was beobachtet man bei den Wertetabellen von linearen Funktionen?

Graphen von linearen Funktionen werden mit einer Gerade dargestellt. Bei einer Wertetabelle beobachtet man, dass die Zahlen auf der y-Achse immer regelmäßig zu- oder abnehmen (z.B. x: -2 -1 0 1 2; y: -4 -2 0 2 4; +2 +2 +2 +2)

## Literatur


Büchter A., Henn H.-W. (Hrsg.) (2008): Der Mathe-Koffer, Friedrich Verlag

Kröpfl, B. (2007): Höhere mathematische Allgemeinbildung am Beispiel von Funktionen, Profil Verlag, München Wien

Mathematik 5 bis 10, Heft 8|2009, Friedrich-Verlag

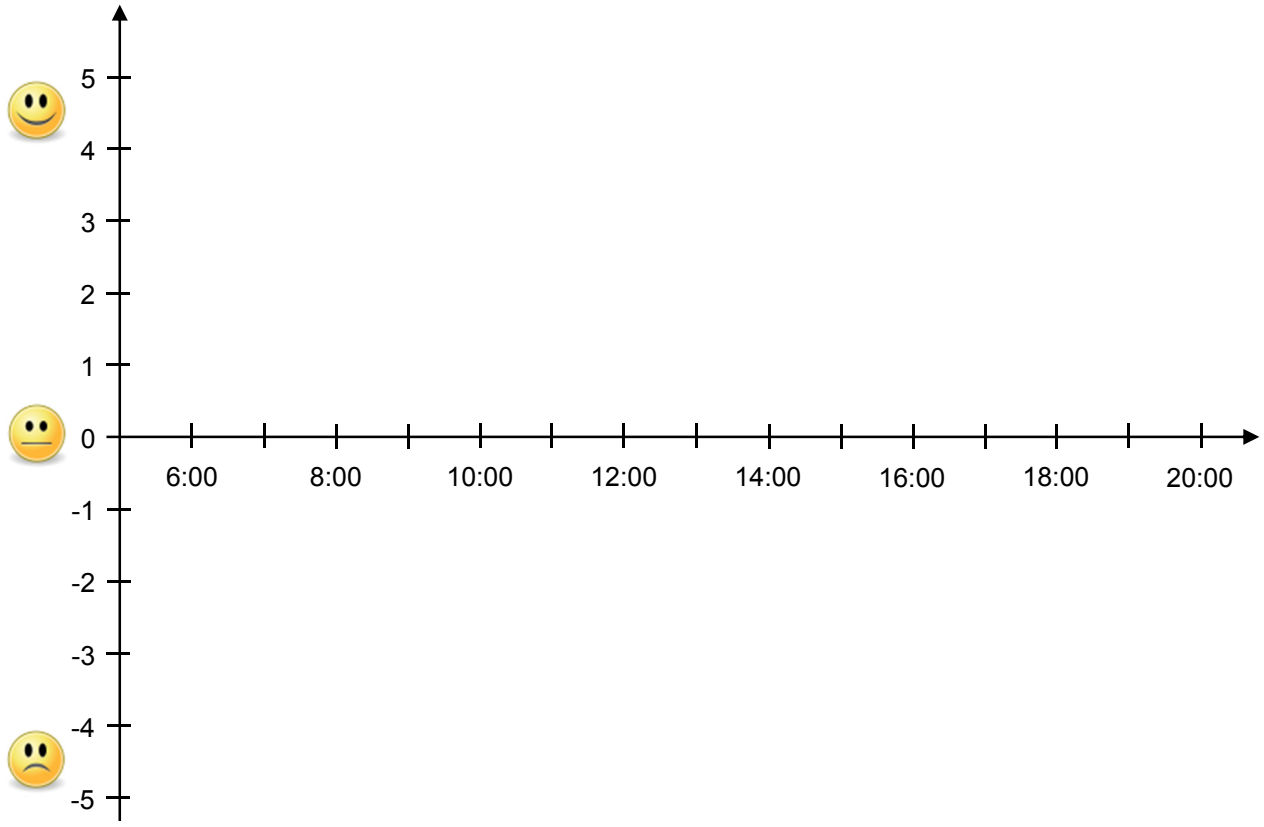
http://www.nawi-aktiv.de/umaterial/labor/laborgeraetequiz_zuordnung.htm

http://www.individualisierung.org/_neu/download/funktionen_pool1.pdf

# Einstieg in funktionales Denken

## Meine persönliche Wohlfühlkurve

Zeichne deine Wohlfühlkurve vom gestrigen Tag.




(nach: Mathematik 5 bis 10, Heft 8|2009, Friedrich-Verlag)

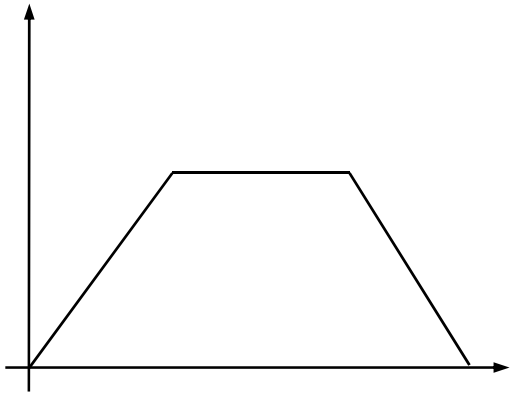
# Stationenarbeit

## 1 Station „CBR“

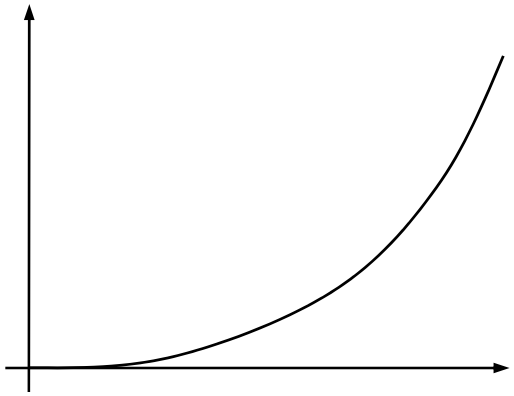
Bewege die Hand vom CBR-Gerät weg und skizziere den Graphen.

Bewege die Hand zum CBR-Gerät hin. Skizziere den Graphen und überlege dir, welche Größe auf der x-Achse und auf der y-Achse aufgetragen wird.

Welche Bewegung musst du mit der Hand machen, um folgenden Graphen zu erhalten? Teste es.

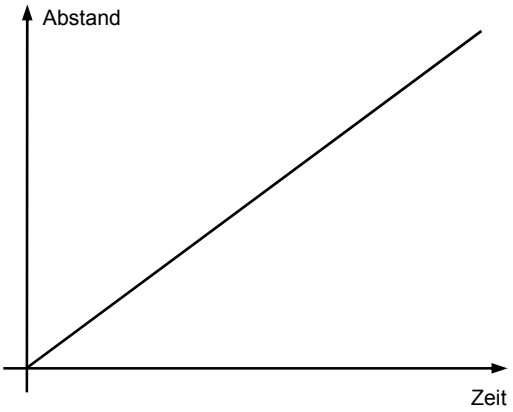


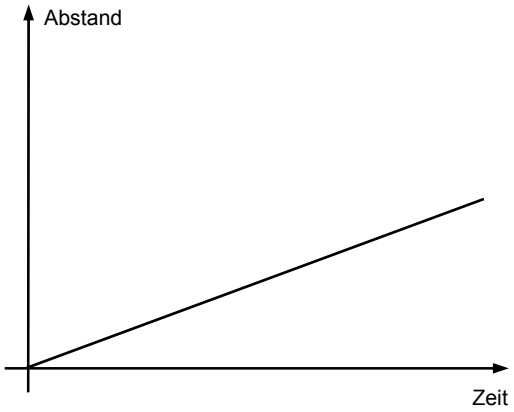
Welche Bewegung musst du mit der Hand machen, um folgenden Graphen zu erhalten? Teste es.

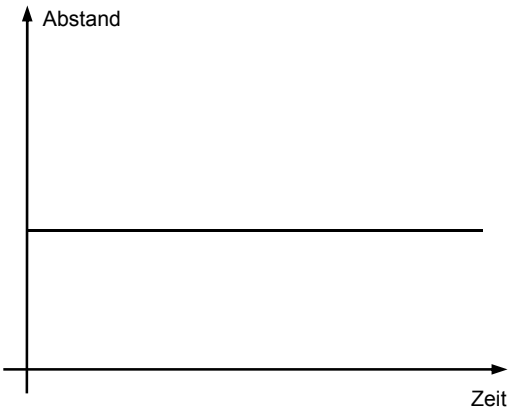


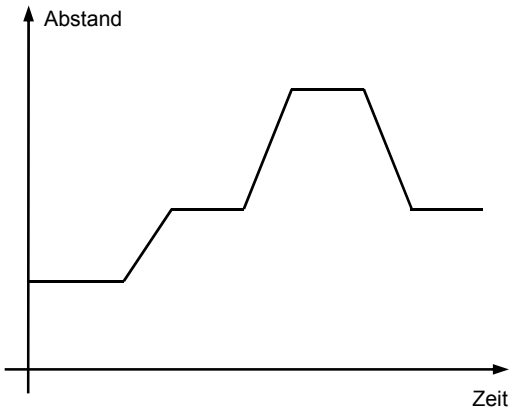
## 2 Station „Graphen gehen“

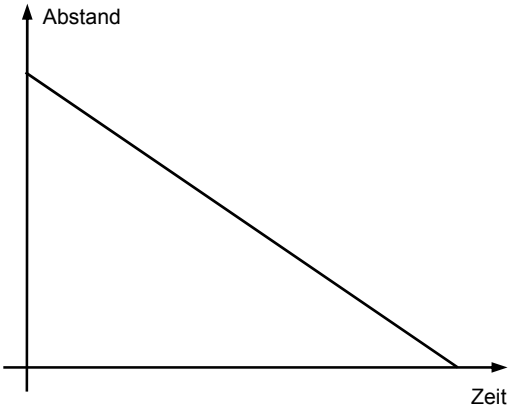
Wählt eine Wand und geht die Graphen nach. Die Graphen sollen euren Abstand zur Wand in Abhängigkeit von der Zeit darstellen. Beschreibt hierbei die Bewegungen auch in Worten. Falls einzelne Graphen nicht umsetzbar sind, begründet warum.

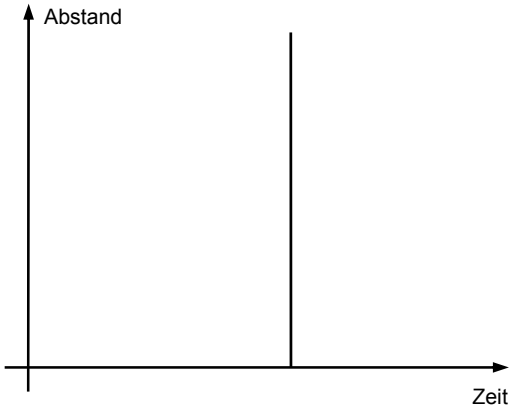


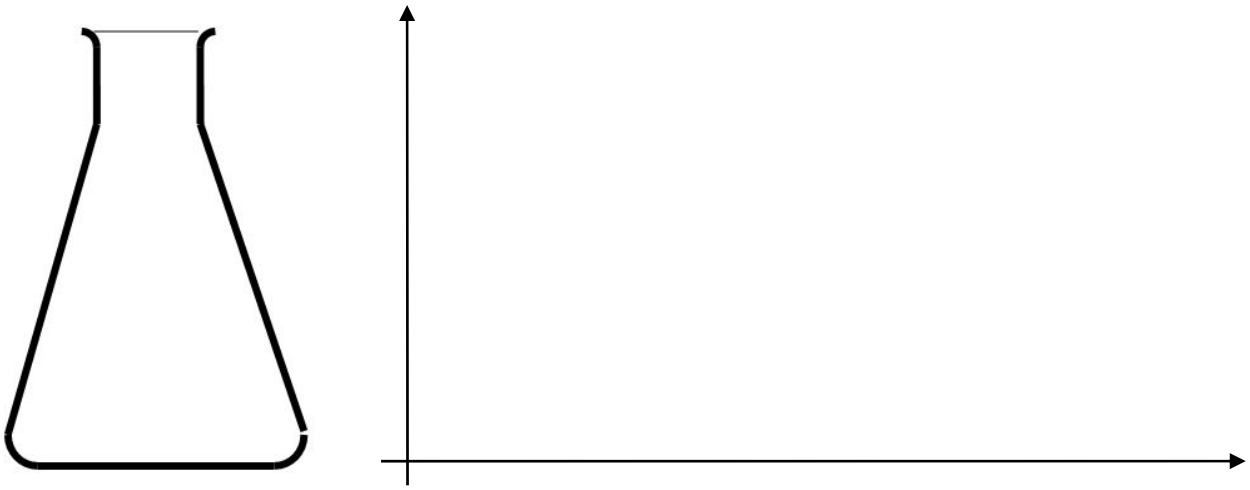




(nach: Mathematik 5 bis 10, Heft 8|2009, Friedrich-Verlag)

## 3 Station „Gefäße füllen“

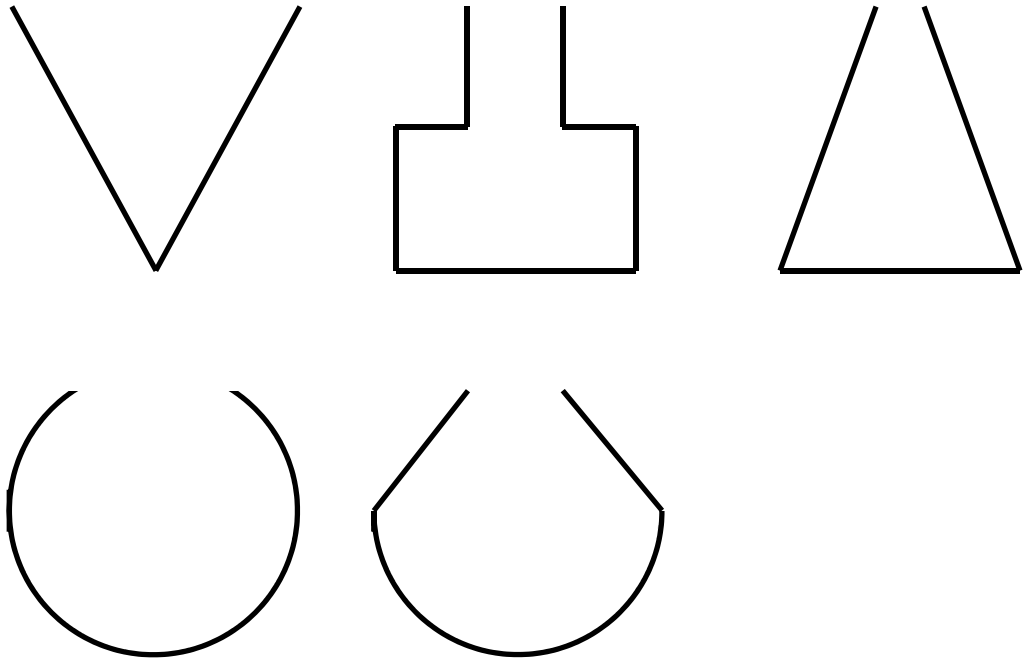
Für diesen Versuch benötigt ihr einen Erlenmeyerkolben, ein Lineal sowie einen Messzylinder.

Untersucht, wie sich der Wasserstand ändert, wenn man den Erlenmeyerkolben gleichmäßig mit Wasser füllt. Stellt das Ergebnis grafisch dar. Beschriftet die x-Achse mit dem Volumen und die y-Achse mit der Höhe des Wasserstands.



(Bild aus http://www.nawi-aktiv.de/umaterial/labor/laborgeraetequiz_zuordnung.htm)

Finde zu den abgebildeten Gefäßen den passenden Füllgraphen.



(nach: Mathematik 5 bis 10, Heft 8|2009, Friedrich Verlag)

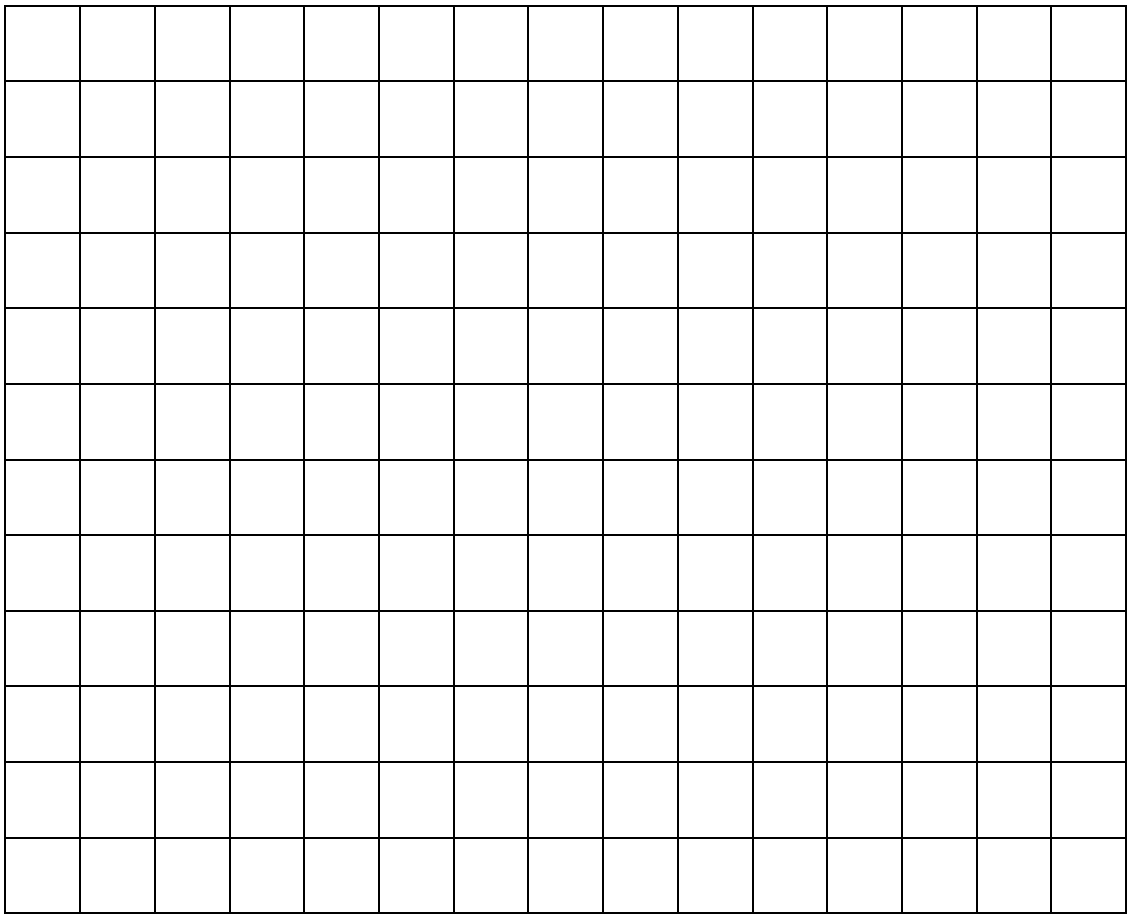
Beschreibe, wie man vom Gefäß zum Füllgraphen und umgekehrt kommt.

Erfinde selbst derartige Beispiele.

## 4 Station „Rechtecke“

Schneide aus Papier vier verschiedene Rechtecke mit dem Flächeninhalt 9 cm² aus!

Zeichne in ein Koordinatensystem den Zusammenhang zwischen den Seiten möglicher Rechtecke ein. Auf den beiden Achsen sollen die Seitenlängen a und b der Rechtecke eingetragen werden. (Maßstab: 1 Kästchen ≙ 1 cm)



Mit welcher Formel findest du die zweite Seitenlänge des Rechtecks, wenn eine Seite gegeben ist?

Klebe die ausgeschnittenen Rechtecke sinnvoll ins Schaubild.

Schneidet der Graph die Achsen? Begründe.

Falls du Station 5 schon gemacht hast: Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten entdeckst du bei den beiden Graphen?

## 5 Station „Reißzweckenschwund“

Wenn man Reißzwecken fallen lässt, werden sicher einige „auf den Rücken“ und andere „auf die Seite“ fallen. Nun sollt ihr untersuchen, nach welcher Regel dies geschieht. Ihr benötigt 100 Reißzwecken und einen Becher zum Würfeln.

Werft die Reißzwecken auf den Boden und sortiert die auf der Seite liegenden aus. Notiert die Anzahl der übriggebliebenen. Wiederholt das Experiment mit den übriggebliebenen Reißzwecken noch vier Mal.

Stellt die Ergebnisse eurer Experimente grafisch dar. Beschriftet die x-Achse mit der Anzahl der Würfe und die y-Achse mit der Anzahl der übriggebliebenen Reißzwecken.

Gibt es eine Regelmäßigkeit? Welche?

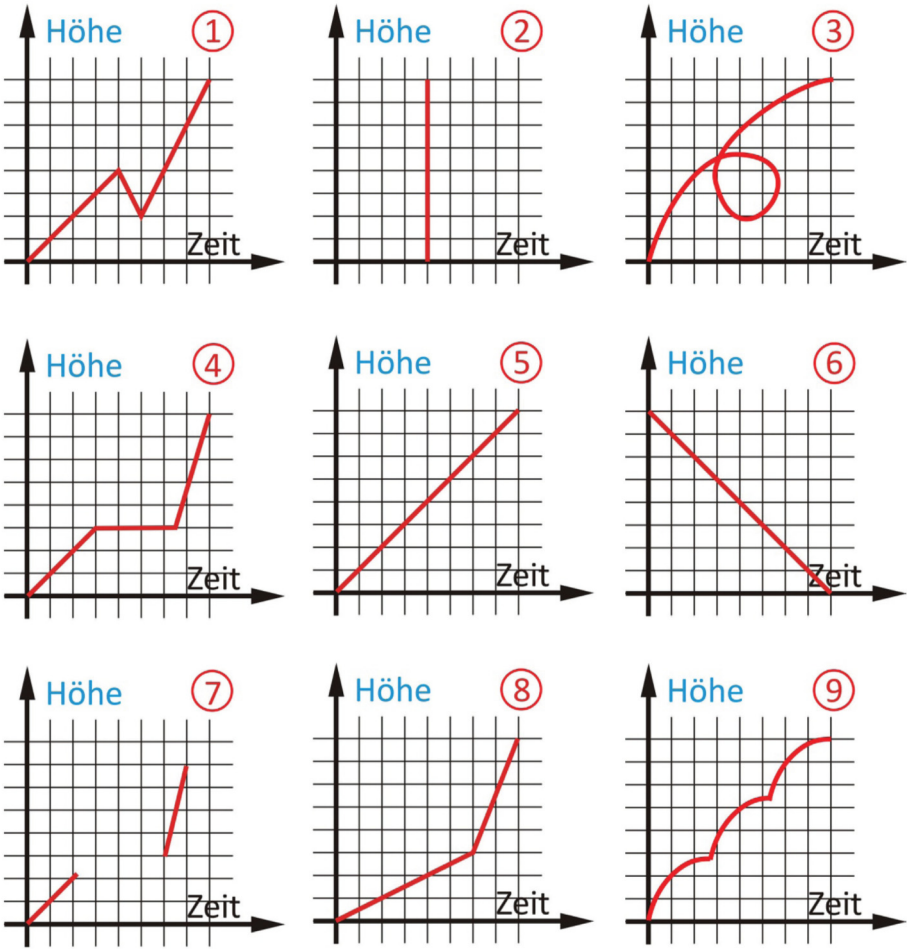
Falls du Station 4 schon gemacht hast: Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten entdeckst du bei den beiden Graphen?

(Idee aus: Mathekoffer, Friedrich-Verlag)

# Hausaufgabe

## 1 Hochziehen einer Fahne

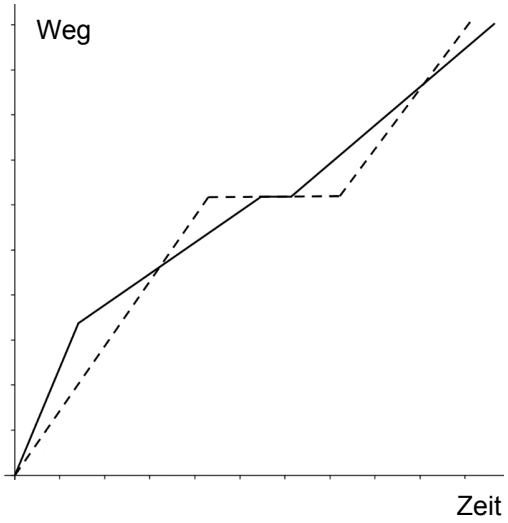
Die neun Abbildungen beschreiben teilweise das Hochziehen einer Fahne. Wie du vielleicht schon beobachtet hast, kann dieser Vorgang sehr unterschiedlich sein. Manche ziehen schnell die Fahne hoch, andere Leute wiederum rasten dazwischen, ... Beschreibe, sofern möglich, wie das Hochziehen der Fahne erfolgt.




(aus: http://www.individualisierung.org/_neu/download/funktionen_pool1.pdf)

## 2 Fahrradrennen

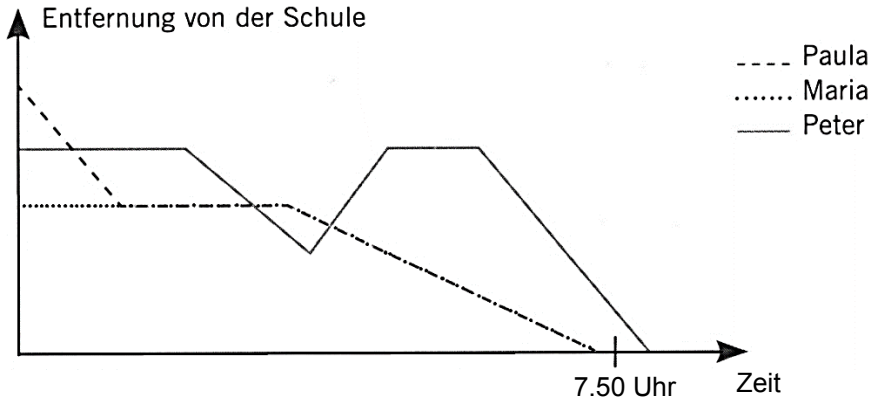
Das Diagramm stellt ein Fahrradrennen dar.
Kommentiere das Rennen als Radioreporter/in.



# Test zu den Funktionen

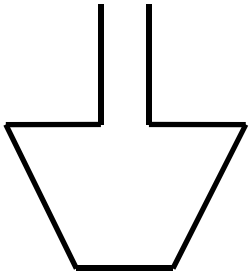
## Aufgabe 1

Peter, Paula und Maria sind Klassenkameraden und wohnen an der gleichen Straße. Am Ende der Straße liegt ihre Schule. Jeden Morgen gehen sie zu Fuß zur Schule, die um 7.50 Uhr beginnt. Die Zeichnung zeigt, wo sie sich gestern zu verschiedenen Zeiten befunden haben.
Was ist in der Früh passiert? (Es muss keine spannende Geschichte sein. Man muss aber erkennen, dass du einen Graphen lesen kannst.)




## Aufgabe 2

Zeichne den Füllgraphen des Gefäßes.



## Aufgabe 3

Wie sehen die Graphen von linearen Funktionen aus? Was beobachtet man bei den Wertetabellen von linearen Funktionen?

Zeichne den Graphen von: $y = \frac{1}{2}x + 3$

## Aufgabe 4

Gib zu beiden Graphen die Funktionsgleichung an.

