Einführung in die Trigonometrie

Sinus, Kosinus, Tangens am rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis

Monika Sellemond, Anton Proßliner, Martin Niederkofler

Thema	Trigonometrie
Stoffzusammenhang	Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis, trigonometrische Funktionen (evtl. mit Parametern)
Klassenstufe	2. Biennium

Intention

Mit dem Satz des Pythagoras kann am rechtwinkligen Dreieck aus zwei gegebenen Seiten die dritte berechnet. Nun werden auch die Winkelgrößen miteinbezogen. In der Unterrichtseinheit lernen die Schülerinnen und Schüler Grundbegriffe der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis kennen. Daraus erarbeiten sie die Sinus-, die Kosinus- und die Tangensfunktion.

Fachlicher Hintergrund

Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie außer im rechten Winkel noch in einem weiteren Winkel übereinstimmen. Damit hängen Sinus, Kosinus und Tangens als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken nur von einem Innenwinkel, nicht aber von der Größe des jeweiligen Dreiecks ab.
Am Einheitskreis lassen sich die Definitionen von Sinus, Kosinus und Tangens auf beliebige Winkel erweitern. Daraus gewinnt man die trigonometrischen Funktionen, wenn man den Winkel als freie Variable betrachtet.

Methodische Hinweise

Die Arbeitsaufträge werden vorwiegend in Partner- oder Gruppenarbeit gelöst; die Ergebnisse werden im Plenum diskutiert und festgehalten.
Nach Arbeitsauftrag 1 erfolgt ein Input der Lehrperson zur Wiederholung der Grundbegriffe im rechtwinkligen Dreieck und zur Definition von Sinus, Kosinus und Tangens. Durch einen Übungsblock werden die Begriffe und Zusammenhänge gefestigt.

Sollten den Lernenden die verschiedenen Winkelmaße noch nicht bekannt sein, werden diese ergänzend mit den entsprechenden Tastensymbolen am Taschenrechner erklärt.

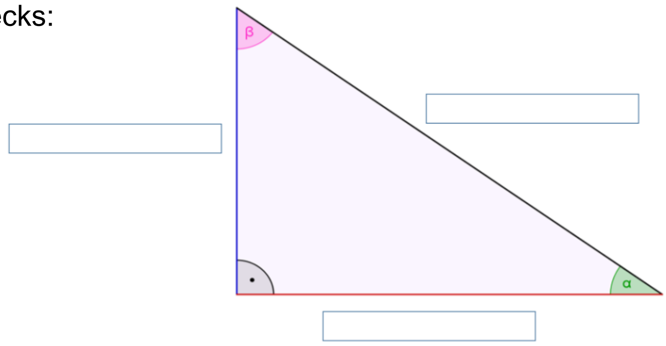
Leistungsbewertung

Bewertet werden kann beispielsweise

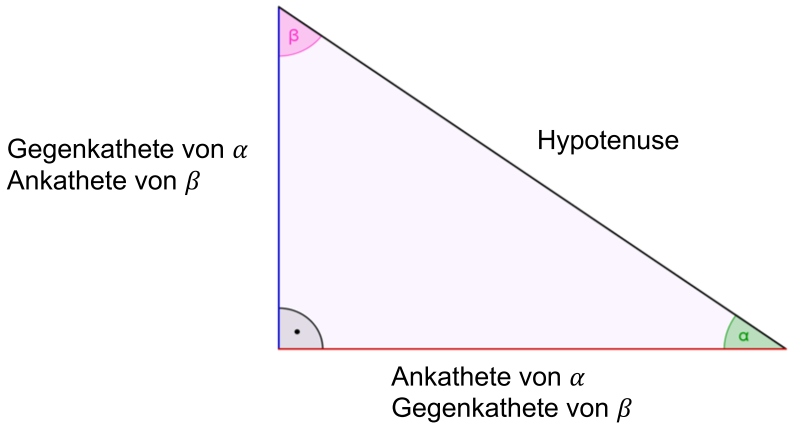
- die Mitarbeit während der Phase der Gruppenarbeit,
- die Präsentation des erhaltenen Ergebnisses sowie
- eine abschließende Testarbeit.

Grundbegriffe im rechtwinkligen Dreieck

Benenne die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks:



Um den Zusammenhang zwischen Winkelgrößen und Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck zu beschreiben, muss man unterscheiden, ob eine Kathete an oder gegenüber einem Winkel liegt.



Definition von Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck

Unter dem **Sinus** eines Winkels versteht man das Verhältnis zwischen Gegenkathete und Hypotenuse.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Unter dem **Kosinus** eines Winkels versteht man das Verhältnis zwischen Ankathete und Hypotenuse.

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Der **Tangens** wird durch das Verhältnis von Sinus zu Kosinus oder auch durch das Verhältnis von Gegenkathete zur Ankathete definiert:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

Warum hängen diese Verhältnisse nur vom Winkel α, nicht aber von der jeweiligen Größe des Dreiecks ab?

Trigonometrie

1 Dreiecke zu Gruppen zuordnen

Schneide verschiedene Dreiecke aus Papier aus.

Teile die Dreiecke in Gruppen ein.

Nenne Eigenschaften, die diese Dreiecksgruppen charakterisieren, und halte deine Überlegungen schriftlich fest.

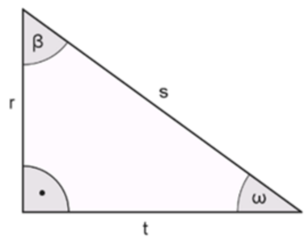
2 Wertebereich von Sinus, Kosinus und Tangens

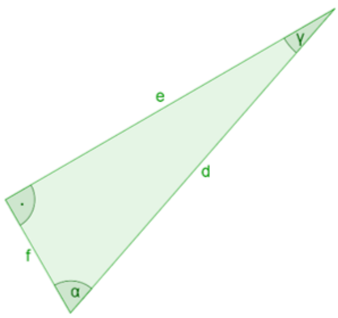
Überlege und notiere: Welche Werte können Sinus, Kosinus und Tangens annehmen?

3 Grundaufgaben

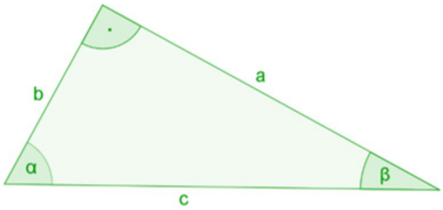
Ergänze die fehlenden Angaben und vergleiche anschließend deine Ergebnisse mit denen deines Banknachbarn bzw. deiner Banknachbarin:

$\sin\beta = \frac{\square}{\square}$ $\quad$ $\sin \square = \frac{r}{\square}$





$\sin\alpha = \frac{\square}{\square}$ $\quad$ $\sin \square = \frac{\square}{d}$



$\tan\alpha = \frac{\quad}{\quad}$

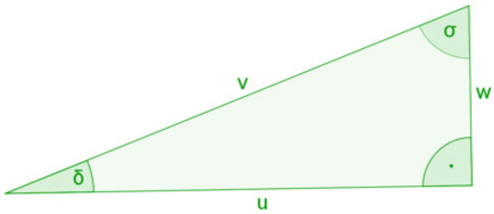
$\cos\beta = \frac{\quad}{\quad}$

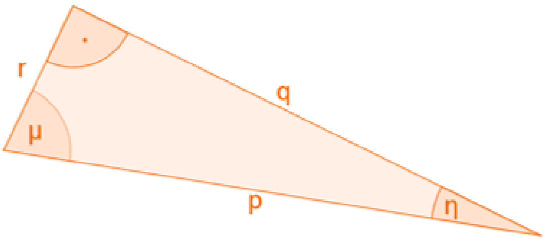
$\sin\beta = \frac{\quad}{\quad}$

$\tan\delta = \frac{\quad}{\quad}$

$\tan\sigma = \frac{\quad}{\quad}$

$\cos\delta = \frac{\quad}{\quad}$





$\frac{r}{q} = \tan \quad$

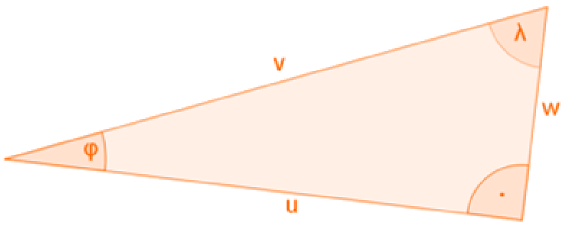
$\frac{q}{p} = \quad \mu$

$\frac{q}{r} = \tan \quad$

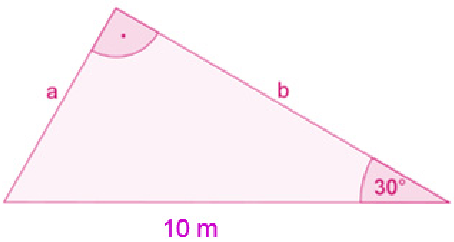
$\frac{w}{v} = \cos \quad$

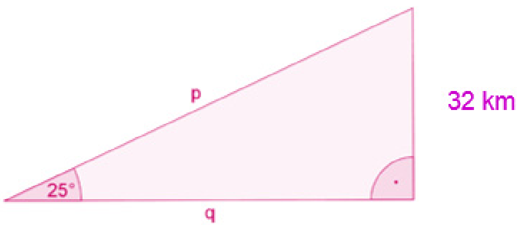
$\frac{w}{\quad} = \sin \quad$

$\frac{\quad}{u} = \tan \quad$



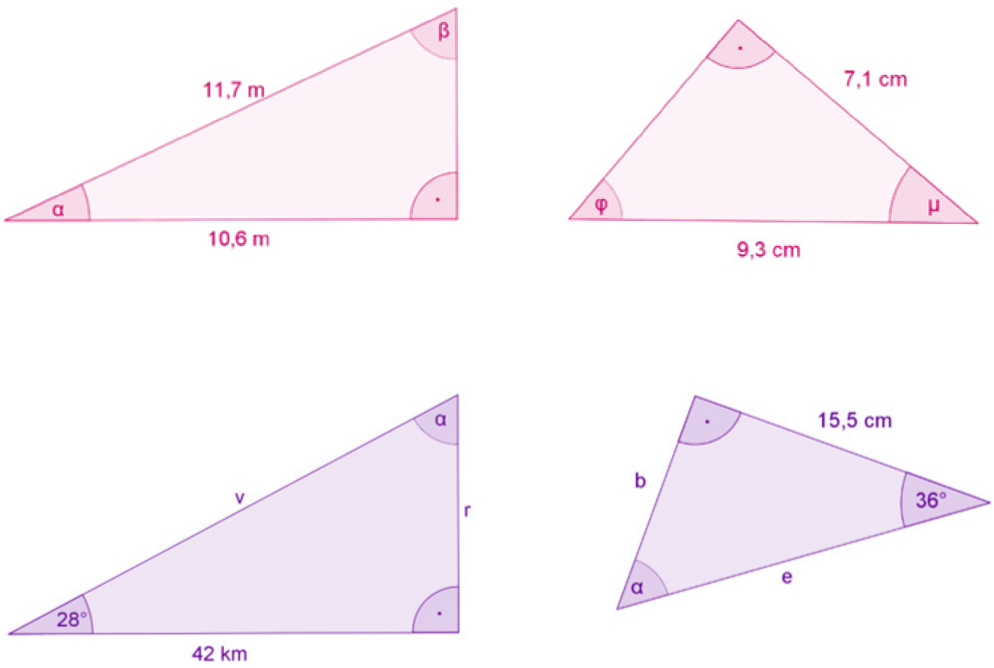
Berechne die fehlenden Seitenlängen:





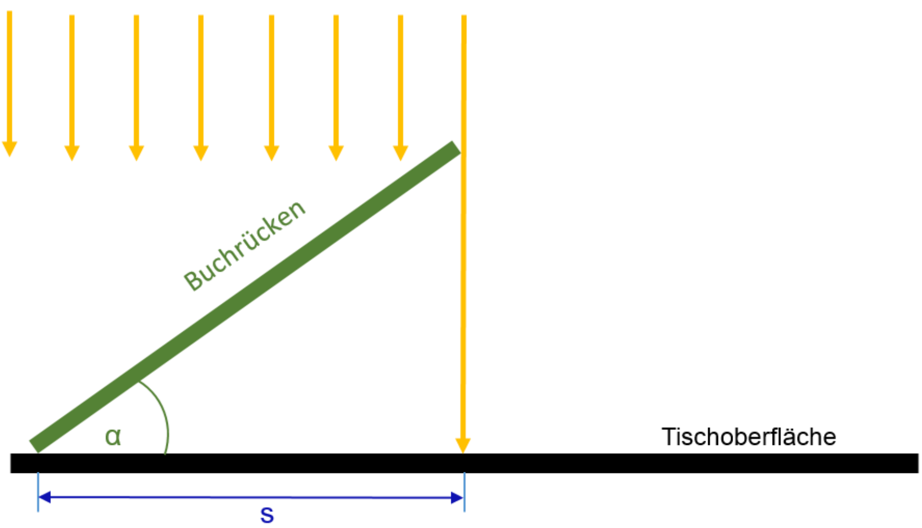
4 Umkehraufgabe – Berechnung der Winkel

Berechne die fehlenden Winkelgrößen und Seitenlängen:



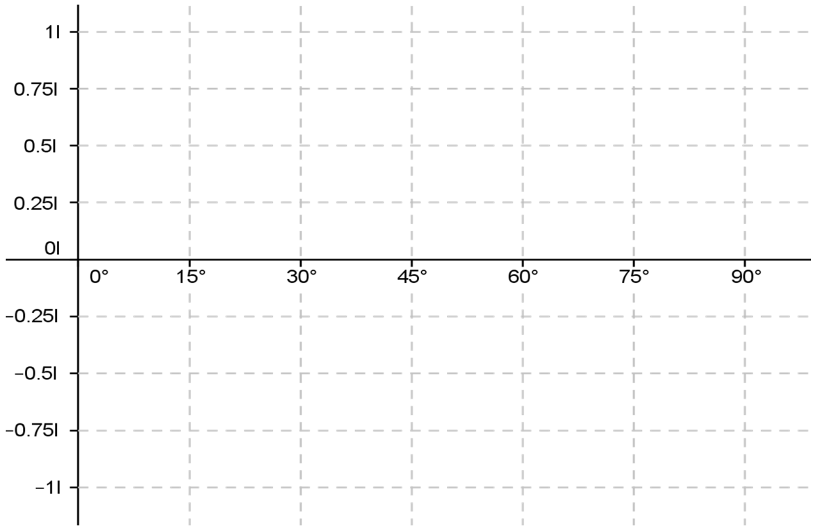
5 Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Halte senkrecht über einem schräg gehaltenen Buch eine Lichtquelle (siehe Abbildung). Dabei wirft das Buch einen Schatten auf die Tischplatte. Miss die Länge s des Schattens für verschiedene Neigungswinkel α und trage die Punkte mit den Koordinaten $(\alpha|s)$ in ein Koordinatensystem ein. Die Länge des Buchrückens wird mit l bezeichnet.



Wertetabelle:

α	s



Welcher funktionelle Zusammenhang besteht zwischen α, l und s?

Ein Widerspruch für Winkel, die größer als 90° sind?

Der Taschenrechner liefert Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte für beliebige Winkel.
Beispiel: $\cos 120° = -0{,}5$.

Nach unserer bisherigen Definition ist dies nicht erklärbar:

- Im rechtwinkligen Dreieck gibt es keine Winkel größer als 90°.
- Da Seitenlängen positiv sind, kann unmöglich ein negatives Seitenverhältnis hervorgehen.

Um die Taschenrechnerausgabe zu verstehen, drehen wir unser „Buch" um 360°. Dies modellieren wir in GeoGebra mit dem Einheitskreis ($r = 1$) mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung.

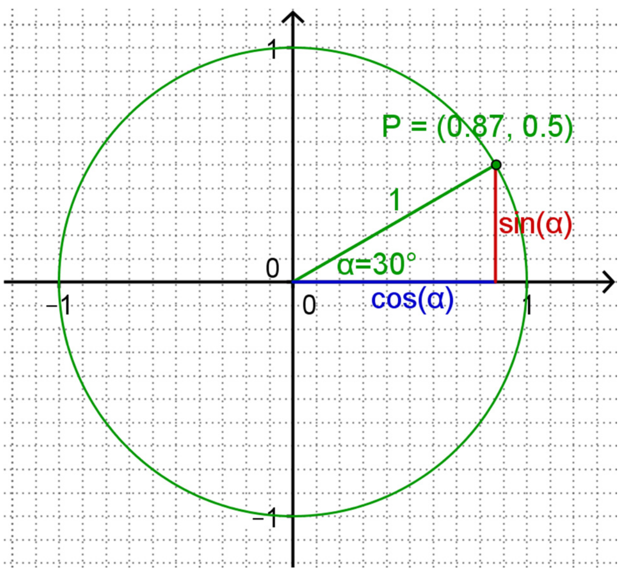
Arbeitsauftrag (GeoGebra)

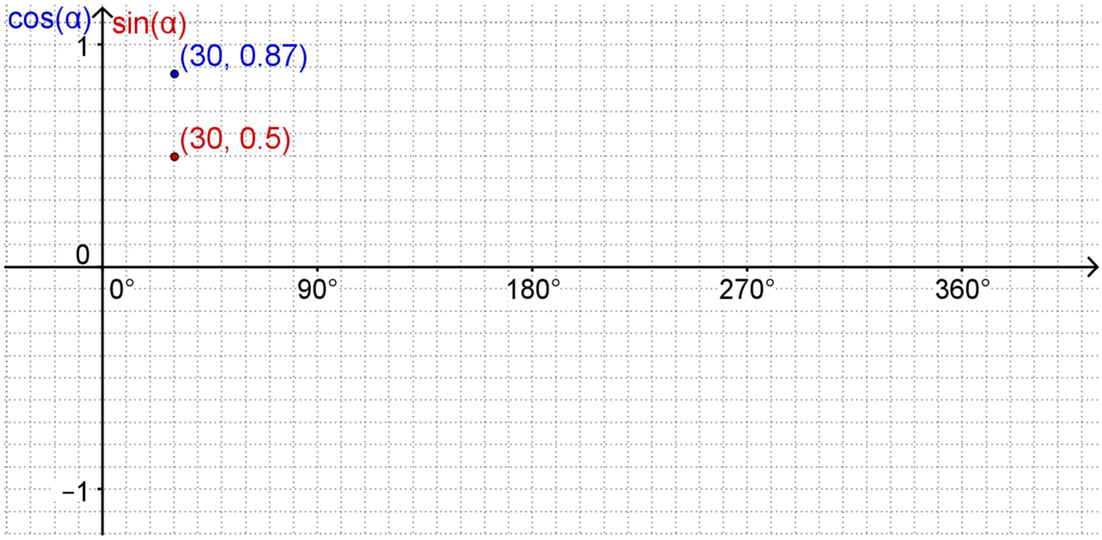
Zeichne um den Koordinatenursprung einen Kreis mit Radius $r = 1$.

Markiere im Abstand von 15° auf der Kreislinie Punkte und bestimme durch Messung die zugehörigen Sinus- und Kosinuswerte (vgl. Abb. für $\alpha = 30°$).

Trage die Ergebnisse für die zugehörigen Winkel im untenstehenden Koordinatensystem ein ($0 < \alpha < 360°$).

Zeichne mit den Messdaten die Sinuskurve (rot) sowie die Kosinuskurve (blau). Beschreibe den Verlauf der Kurven in eigenen Worten.

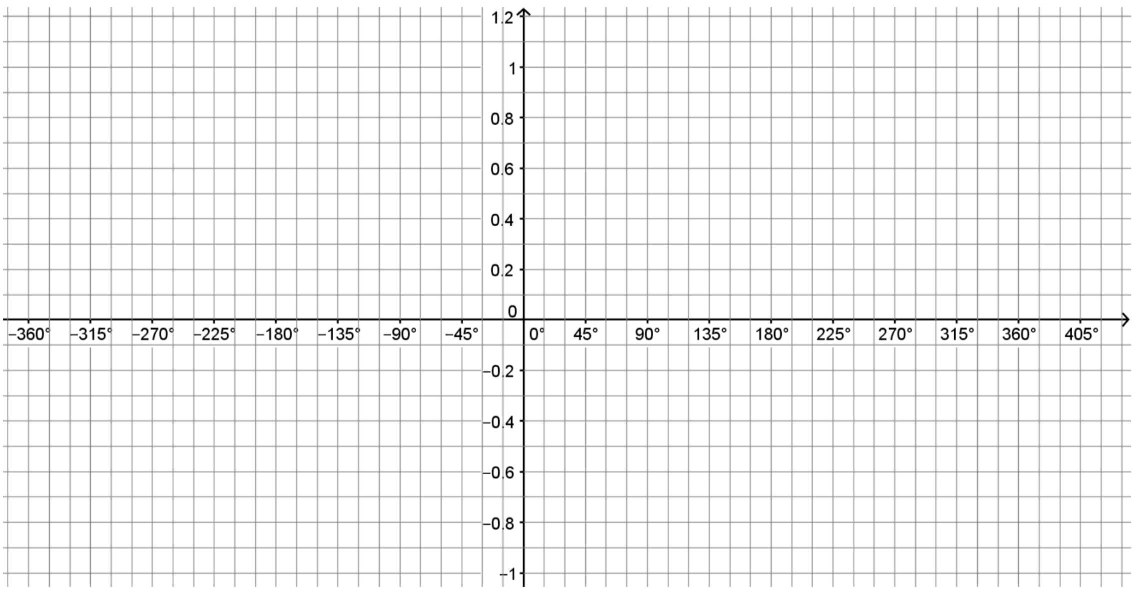




Öffne die Datei „Sinus_Kosinus_Einheitskreis.ggb“, verändere den Winkel α und vergleiche die entstehende Kurve mit deinem Schaubild.

Stelle folgende Überlegungen an:

- Wie verlaufen die Kurven, wenn der Winkel größer als 360° ist?
- Was geschieht bei negativen Winkelgrößen?
- Für welche Winkelgrößen ergeben sich gleiche Sinus- und Kosinuswerte? Drücke dies mithilfe einer Formel aus.



Funktionen, bei denen sich die Funktionswerte in festen Abständen wiederholen, heißen **periodische Funktionen**.

Der kürzeste dieser Abstände heißt **Periodenlänge.**

Die Periodenlänge der Sinus- und Kosinusfunktion beträgt …………………. .

Begründe den sogenannten **trigonometrischen Pythagoras**:

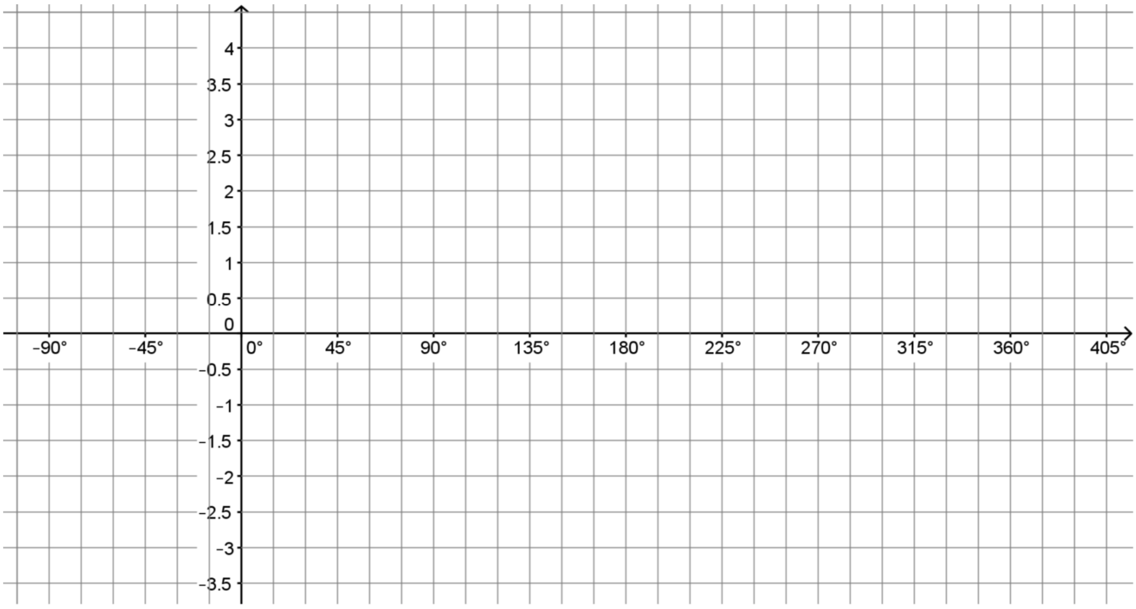
$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

6 Die Tangensfunktion

Bestimme für verschiedene Winkelwerte das Verhältnis zwischen Sinus und Kosinus und trage die Punkte im Koordinatensystem ein.

α	$sin(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$tan(\alpha)$
0°			
30°			
45°			
60°			
90°			
180°			
225°			
270°			
315°			
360°			

α	$sin(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$tan(\alpha)$
- 30°			
- 45°			
- 60°			



Beschreibe den Kurvenverlauf der Tangensfunktion. Wo gibt es „kritische" Stellen?

7 Anwendungsaufgaben

Das Wassermolekül hat einen Winkel zwischen den zwei Wasserstoff-atomen von 104,45°.
Der Abstand zwischen Wasserstoffatom und Sauerstoffatom beträgt 95,84 pm = 95,84 · 10^{-12} m.

Berechne den Abstand zwischen den Wasserstoffatomen.

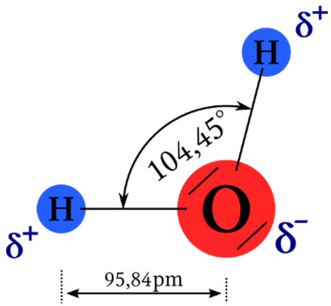


Bild aus: Wikimedia Commons

Eine große Aufgabensammlung nach verschiedenen Anforderungsprofilen findet sich unter http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1ge/rd/rdindex.html.